فصل ۱۵

نظریهٔ جنبشی گازها

بخش ۱۵-۱ عدد آووگادرو

●۱- جرم $۷/۵۰\times۱۰^{۲۴}$ اتم آرسنیک را که جرم مولی آن $۷۴/۹g/mol$ است، برحسب کیلوگرم پیدا کنید.

حل: جرم هر اتم برابر $m = M/N_A$ است که در آن M جرم مولی و N_A عدد آووگادرو است. جرم مولی آرسنیک $۷۴/۹g/mol$ یا $۷۴/۹\times۱۰^{-۳}$ kg/mol است. به این ترتیب جرم کل تعداد $۷/۵۰\times۱۰^{۲۴}$ اتم آرسنیک برابر است با

$$(۷/۵۰\times۱۰^{-۲۴})(۷۴/۹\times۱۰^{-۳}\ \text{kg/mol})(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{mol}^{-۱})$$
$$=۰/۹۳۳\text{kg}$$

●۲- جرم مولی طلا $۱۹۷g/mol$ است. (الف) در $۲/۵۰g$ طلای خالص چند مول طلا وجود دارد؟ (ب) در این نمونه چند اتم وجود دارد؟

حل: **(الف)** از معادلهٔ ۱۵-۳ داریم

$$n=\frac{M_{\text{sam}}}{M}=\frac{۲/۵}{۱۹۷}=۰/۰۱۲۷\,\text{mol}$$

(ب) از معادلهٔ ۱۵-۲ داریم

$$N=nN_A=(۰/۰۱۲۷)(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})=۷/۶۴\times۱۰^{۲۱}$$

Scanned by CamScanner

۱۰۰- WWW ILW SSM هــوایی کــه در آغــاز در فشــار پیمانه‌ای ۱۰۳/۰ kPa حجم ۰/۱۴۰ m^3 را اشغال کرده است بـه طور تک‌دما تا فشار ۱۰۱/۳ kPa منبسط و سپس در فشار ثابـت سرد می‌شود تا اینکه به حجم اولیهٔ خود برسد. کار انجـام شـده به وسیلهٔ هوا را محاسبه کنید. (فشار پیمانه‌ای عبـارت اسـت از اختلاف بین فشار واقعی و فشار جو)

حل: $p_۱ = p + p_{atm} = ۱۰۳ + ۱۰۱/۳ = ۲۰۴/۳ \text{kPa}$

از آنجا که این فرآیند شامل دو قسمت تک‌دما و تک فشار است پس کار کل انجام شده به‌صورت زیر است

$$W_{tot} = W_{\text{تک‌دما}} + W_{\text{تک‌فشار}}$$

در فرآیند تک‌دما داریم؛

$$W_{\text{تک‌دما}} = \int pdV = nRT_۱ \ln\frac{V_۲}{V_۱} = p_۱v_۱ \ln\frac{V_۲}{V_۱}$$

$$W_{\text{تک‌دما}} = (۲۰۴/۳ \times ۱۰^۳)(۰/۱۴)\ln\frac{۰/۲۸۲}{۰/۱۴} = ۲/۰۰ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

و در فرآیند تک‌فشار داریم؛

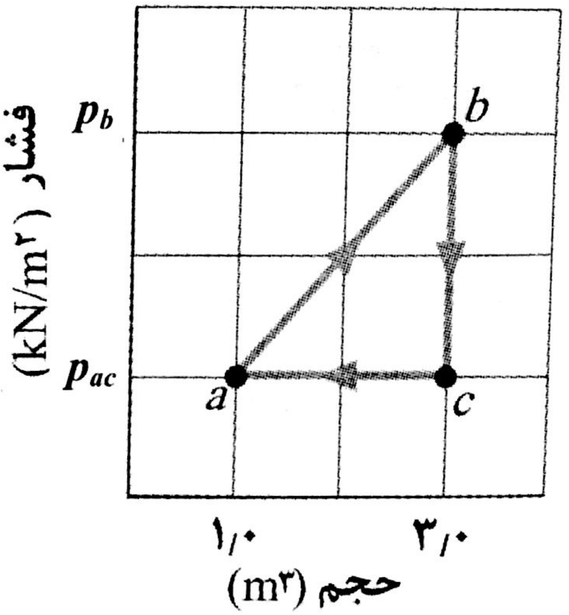
$$W_{\text{تک‌فشار}} = p_۲(V_۱ - V_۲) = (۱۰۱/۳ \times ۱۰^۳)(۰/۱۴ - ۰/۲۸۲)$$

$$= -۱/۴۴ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{tot} = ۲/۰۰ \times ۱۰^۴ + (-۱/۴۴ \times ۱۰^۴) = ۵/۶۰ \times ۱۰^۳ \text{ J}$$

Scanned by CamScanner

۱۳۰۰- نمونه‌ای از یک گاز آرمانی فرآیند چرخه‌ای $abca$ نشان داده شده در شکل ۱۵-۲۰ را طی می‌کند. مقیاس محور عمودی با $p_b = ۷/۵\text{kPa}$ و $p_{ac} = ۲/۵\text{kPa}$ مشخص شده است. (الف) چند مول گاز در این نمونه وجود دارد؟ (ب) دمای گاز در نقطهٔ b، (پ) دمای گاز در نقطهٔ c و (ت) انرژی خالص داده شده به گاز به صورت گرما در این طول این چرخه، چقدر است؟



شکل ۱۵-۲۰ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف) با استفاده از نقطهٔ a می‌توان n را محاسبه نمود.

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT} = \frac{(۲/۵\times ۱۰^{۳})(۱/۰)}{(۸/۳۱)(۲۰۰)} = ۱/۵\,\text{mol}$$

(ب) با استفاده از نقاط a و b داریم:

Scanned by CamScanner

$$\frac{p_a V_a}{T_a} = \frac{p_c V_c}{T_c} \Rightarrow T_b = \frac{p_a V_a T_a}{p_a V_a}$$

$$T_b = \frac{(۷/۵ \times ۱۰^{۳})(۳/۰)(۲۰۰)}{(۲/۵ \times ۱۰^{۳})(۱/۰)} = ۱/۸ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{K}$$

(پ) با استفاده از نقاط a و c داریم:

$$\frac{p_a V_a}{T_a} = \frac{p_c V_c}{T_c}$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{p_c V_c T_a}{p_a V_a} = \frac{(۲/۵ \times ۱۰^{۳})(۳/۰)(۲۰۰)}{(۲/۵ \times ۱۰^{۳})(۱/۰)} = ۶/۰ \times ۱۰^{۲}\ \mathrm{K}$$

(ت) در چرخهٔ کامل $abca$ ، تغییرات انرژی داخلی صفر است، $\Delta E_{\mathrm{int}} = ۰$ ، لذا $W_{\mathrm{net}} = Q_{\mathrm{net}}$ است و کار خالص برابر با مساحت زیر چرخه (یعنی مثلث abc) است.

$$W = \frac{۱}{۲}(۳ - ۱)(۷/۵ \times ۱۰^{۳} - ۲/۵ \times ۱۰^{۳}) = ۵ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{J} = ۵\mathrm{kJ}$$

Scanned by CamScanner

●●۱۴۰۰- در گسترهٔ دمایی ۷۷°C تا ۳۳۰K، فشار p یک گاز غیرآرمانی معین به حجم V و دمای T با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$p=(۲۴/۹\ \mathrm{J/K})\frac{T}{V}-(۰/۰۰۶۶۲\ \mathrm{J/K^{۲}})\frac{T^{۲}}{V}$$

اگر دمای گاز از ۳۱۵K به ۳۲۵K افزایش یابد و فشار ثابت نگه داشته شود، چقدر کار توسط گاز انجام می‌شود؟

حل:

$$\begin{cases} T_{۱}=۳۱۵\,\mathrm{K} \\ T_{۲}=۳۲۵\,\mathrm{K} \end{cases}$$

حجم گاز در دماهای $T_{۱}$ و $T_{۲}$ را از رابطهٔ میان p و V و T داده شده می‌توان یافت

$$p=۲۴/۹\frac{T}{V}-۰/۰۰۶۶۲\frac{T^{۲}}{V}\Rightarrow V=\frac{۲۴/۹T-۶۶۲\times ۱۰^{-۵}\,T^{۲}}{p}$$

$$W=\int pdV=p\int_{V_{۱}}^{V_{۲}}dV=P(V_{۲}-V_{۱})$$

$$W=p\left[\frac{۲۴/۹T_{۲}-۶۶۲\times ۱۰^{-۵}\,T_{۲}^{۲}}{p}-\frac{۲۴/۹T_{۱}-۶۶۲\times ۱۰^{-۵}\,T_{۱}^{۲}}{p}\right]$$

$$=۲۴/۹(T_{۲}-T_{۱})-۶۶۲\times ۱۰^{-۵}\,(T_{۲}^{۲}-T_{۱}^{۲})$$

$$=۲۴/۹(۳۲۵-۳۱۵)-۶۶۲\times ۱۰^{-۵}\,(۳۲۵^{۲}-۳۱۵^{۲})$$

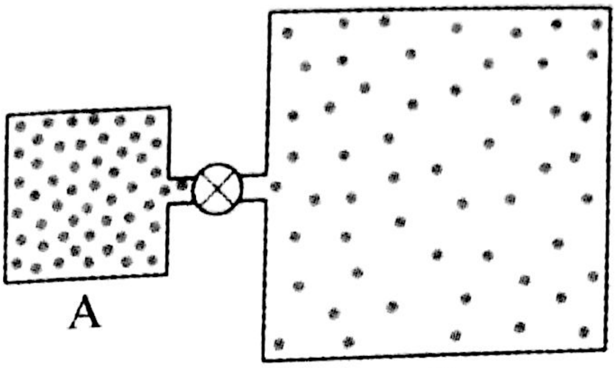
$$=۲۰۷\,\mathrm{J}$$

Scanned by CamScanner

●●●۱۷- GO فشار گاز آرمانی محفظهٔ A در شکل ۱۵-۲۲ برابر با $5/0\times10^{5}$ Pa و دمای آن ۳۰۰K است. این محفظه با لولهٔ نازکی (و یک شیر بسته) به محفظهٔ B که حجم آن چهار برابر حجم محفظهٔ A است وصل شده است. در محفظهٔ B همان گاز آرمانی در فشار $1/0\times10^{5}$ Pa و دمای ۴۰۰K قرار دارد. شیر

Scanned by CamScanner

اتصال را باز می‌کنیم و در حالی که هر محفظه در دمای اولیه خود نگه داشته شده است، دو محفظه در یک فشار به تعادل می‌رسند. فشار نهایی در دو محفظه چقدر است؟



شکل ۱۵–۲۲ مسئلهٔ ۱۶

حل: تساوی‌های زیر را می‌توان از صورت مسئله، استفاده نمود.

$p'_A = p'_B = p$ و $V_B = ۴V_A$

$T_A = T'_A$ و $T_B = T'_B$

$V'_A = V_A$ و $V'_B = V_B = ۴V_A$

تعداد مول‌های مجموعه قبل و بعد از باز کردن شیر برابر است؛

$$n_A + n_B = n'_A + n'_B$$

$$\frac{p_A V_A}{RT_A} + \frac{p_B V_B}{RT_B} = \frac{p'_A V'_A}{RT'_A} + \frac{p'_B V'_B}{RT'_B}$$

$$\frac{(۵\times ۱۰^۵)V_A}{۳۰۰} + \frac{(۱/۰\times ۱۰^۵)(۴V_A)}{۴۰۰} = \frac{PV_A}{۳۰۰} + \frac{P(۴V_A)}{۴۰۰}$$

$$\Rightarrow p = ۲/۰\times ۱۰^۵ \text{ Pa}$$

$$p'_A = p'_B = p = ۲/۰\times ۱۰^۵ \text{ Pa}$$

Scanned by CamScanner

۲۳۰۰- باریکه‌ای از مولکول‌های هیدروژن (H_2) با زاویهٔ 55° به خط عمود بر دیواری نشانه روی شده است. تندی هر مولکول در باریکه $1/0\,km/s$ و جرم آن $3/3\times10^{-24}g$ است. باریکه با آهنگ 10^{23} مولکول بر ثانیه به سطحی به مساحت $2/0\,cm^2$ از دیوار برخورد می‌کند. فشاری که باریکهٔ مولکول‌ها بر دیوار وارد می‌کند چقدر است؟

حل: برای هر مولکول، نیروی وارد بر دیواره به‌صورت زیر است:

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{2mv_x}{\Delta t}=\frac{2mv\cos\theta}{\Delta t}$$

نیروی وارد بر دیواره از طرف N مولکول نیز بصورت زیر است

$$F=\frac{2Nmv\cos\theta}{\Delta t}$$

و فشار ناشی از این نیرو به دیواره چنین است

$$p=\frac{F}{A}=\frac{2Nmv\cos\theta}{A\Delta t}=\frac{(10^{23})(2)(3/3\times10^{-27})(10)(\cos55^\circ)}{(2\times10^{-4})(1)}$$

$$=1/9\times10^{3}\ Pa$$

Scanned by CamScanner

۲۴●●- چگالی یک گاز در دمای ۲۷۳K و فشار atm $۱/۰۰\times۱۰^{-۲}$ برابر با $۱/۲۴\times۱۰^{-۵}$g/cm^{۳} است. (الف) مقدار v_{rms} مولکول‌های گاز را پیدا کنید. (ب) جرم مولی گاز را محاسبه و (ب) نوع گاز را شناسایی کنید. (راهنمایی: نام این گاز در جدول ۱۵-۱ آمده است.)

حل: (الف) $pV = nRT$ ، $\rho = \frac{M_{sam}}{V}$ ، $m_{sam} = nM$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{۳RT}{M}} = \sqrt{\frac{۳nRT}{nM}} = \sqrt{\frac{۳pV}{m_{sam}}} = \sqrt{\frac{۳p}{\frac{m_{sam}}{V}}} = \sqrt{\frac{۳p}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{۳(۱/۰\times۱۰^{۵})}{۱/۲۴\times۱۰^{-۲}}} = ۴۹۴\,\text{m/s}$$

(ب)

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{۳RT}{M}} \Rightarrow$$

$$M = \frac{۳RT}{v_{rms}^{۲}} = \frac{۳(۸/۳۱)(۲۷۳)}{(۴۹۴)^{۲}} = ۰/۰۲۷۹\ \text{kg/mol}$$

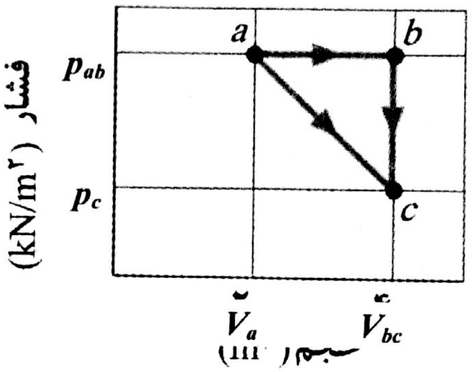
$$= ۰/۰۲۷۹\ \text{kg/mol}$$

(پ) با استفاده از اطلاعات جدول ۱۵-۱ می‌بینیم که این جرم مولی مربوط به گاز نیتروژن است.

Scanned by CamScanner

۲ ۲

●●۴۴۰- یک مول از یک گاز دو اتمی آرمانی در راستای مسیر قطری از a تا c را در شکل ۱۵-۲۵ طی می‌کند. مقیاس محور عمودی با $p_{ab} = ۵/۰\,\text{kPa}$ و $p_c = ۲/۰\,\text{kPa}$ و مقیاس محور افقی با $V_a = ۲/۰\,\text{m}^۳$ و $V_{bc} = ۴/۰\,\text{m}^۳$ مشخص شده است. در این انتقال (الف) تغییر در انرژی درونی گاز چقدر است؟ و (ب) چقدر انرژی به صورت گرما به گاز داده می‌شود؟ (پ) اگر گاز در راستای مسیر غیر مستقیم abc از a تا c را طی کند چقدر گرما لازم است؟



شکل ۱۵-۲۵ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف) از قانون گازهای کامل برای نقطهٔ a داریم:

$$p_a V_a = nRT_a$$

$$\Rightarrow (۵\times ۱۰^۳)(۲) = (۱)(۸/۳۱)T_a \Rightarrow T_a = ۱۲۰۳/۴\,\text{K}$$

و برای نقطهٔ b داریم:

$$p_C V_C = nRT_C$$

$$\Rightarrow (۲\times ۱۰^۳)(۲) = (۱)(۸/۳۱)T_a \Rightarrow T_a = ۱۲۰۳/۴\,\text{K}$$

$$\begin{cases} \Delta E_{\text{int}} = nC_V\Delta T \\ C_V = \frac{۵}{۲}R \end{cases} \text{(برای گاز دو اتمی داریم)} \Rightarrow \Delta E_{\text{int}} = \frac{۵}{۲}nR(T_C - T_A)$$

$$\Delta E_{\text{int}} = (۱)\left(\frac{۵}{۲}\right)(۸/۳۱)(۹۶۲/۷ - ۱۲۰۳/۴) = -۵/۰\times ۱۰^۳\ \text{J}$$

(ب)

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W \Rightarrow -۵۰۰۲/۹ = Q - W \Rightarrow Q = W - ۵/۰\times ۱۰^۳$$

Scanned by CamScanner

کار، مساحت زیر نمودار $p-V$ است.

$$W=\frac{۱}{۲}\cdot\overline{ab}\cdot\overline{bc}=\frac{۱}{۲}(۴-۲)(۵\times۱۰^{۳}+۲\times۱۰^{۳})=۷۰۰۰\ \text{J}$$

$$\Rightarrow Q=۷۰۰۰-۵/۰\times۱۰^{۳}=۲/۰\times۱۰^{۳}\ \text{J}$$

(پ) کار در فرآیند ab برابر مساحت زیر خط ab است؛

$$W_{ab}=(۴-۲)(۵\times۱۰^{۳})=۱/۰\times۱۰^{۴}\ \text{J}$$

و کار در فرآیند bc ، که فرآیندی تک حجم است صفر است؛

$$W_{bc}=۰$$

$$W=W_{ab}+W_{bc}=۱/۰\times۱۰^{۴}+۰=۱/۰\times۱۰^{۴}\ \text{J}$$

$$\Delta E_{\text{int}}=Q-W\Rightarrow Q=\Delta E_{\text{int}}+W$$

$$Q=-۵/۰\times۱۰^{۳}+۱/۰\times۱۰^{۴}=۵/۰\times۱۰^{۳}\ \text{J}$$

Scanned by CamScanner

●●۴۵۰۰- ILW جرم یک مولکول گاز را می‌توان از گرمای ویژهٔ آن در حجم ثابت c_V محاسبه کرد. (توجه کنید که این همان C_V نیست.) با قرار دادن $c_V = ۰/۰۷۵\,\text{cal/g}\cdot\text{C}^\circ$ برای آرگون، (الف) جرم اتم آرگون و (ب) جرم مولی آرگون را محاسبه کنید.

حل: (الف) $C_V = Mc_V$، که در آن M جرم مولی، c_V گرمای ویژه مولی در حجم ثابت و C_v گرمای ویژه در حجم ثابت است و $M = mN_A$ و برای یک گاز تک اتمی $C_V = \frac{۳}{۲}R$ است.

$$\Rightarrow C_V = M c_V = m N_A c_V \Rightarrow m = \frac{C_V}{N_A c_V}$$

$$C_V = \frac{۳}{۲}(۸/۳۱) = ۱۲/۴۷\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} = \frac{۱۲/۴۷}{۴/۱۸۶} = ۲/۹۸\frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot{}^\circ\text{C}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{۲/۹۸}{(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})(۰/۰۷۵)} = ۶/۶\times۱۰^{-۲۳}\ \text{g}$$

(ب) $$M = \frac{C_V}{c_V} = \frac{۲/۹۸}{۰/۰۷۵} = ۳۹/۷\,\text{g/mol}$$

Scanned by CamScanner

۵۲۰۰- ●● فرض کنید $12/0\,g$ گاز اکسیژن (O_2) در فشار جوی ثابت از $25/0^\circ C$ تا $125^\circ C$ گرم می‌شود. (الف) چند مول اکسیژن وجود دارد؟ (در مورد جرم مولی به جدول ۱۵-۱ نگاه کنید.) (ب) چقدر انرژی به صورت گرما به اکسیژن داده می‌شود؟ (مولکول‌ها چرخش می‌کنند ولی نوسان نمی‌کنند.) (پ) چه کسری از گرما برای افزایش انرژی درونی اکسیژن مصرف می‌شود.

حل: (الف)

$$n = \frac{m}{M} = \frac{12}{32} = 0/375\,\text{mol}$$

(ب)

$$Q = nC_p\Delta T = \frac{7}{2}nR\Delta T = \frac{7}{2}(0/375)(8/31)(125-25)$$

Scanned by CamScanner

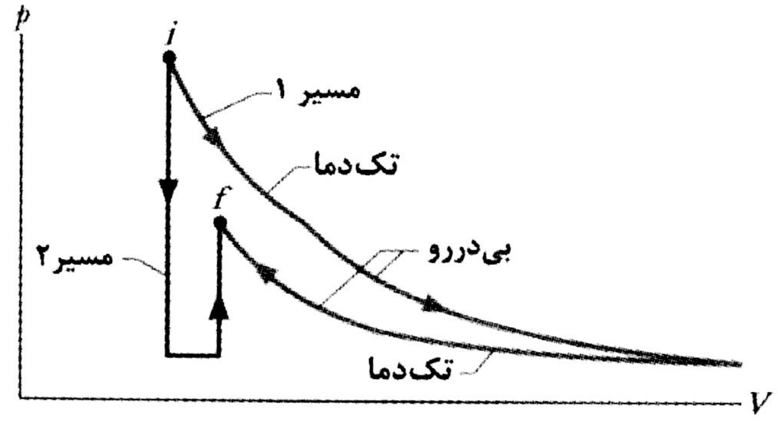
$$= ۱/۰۹ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{J}$$

(پ)

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{int}}}{Q} = \frac{nC_V \Delta T}{nC_p \Delta T} = \frac{C_V}{C_p} = \frac{\frac{۵}{۲}R}{\frac{۷}{۲}R} = \frac{۵}{۷} \approx ۰/۷۱۴$$

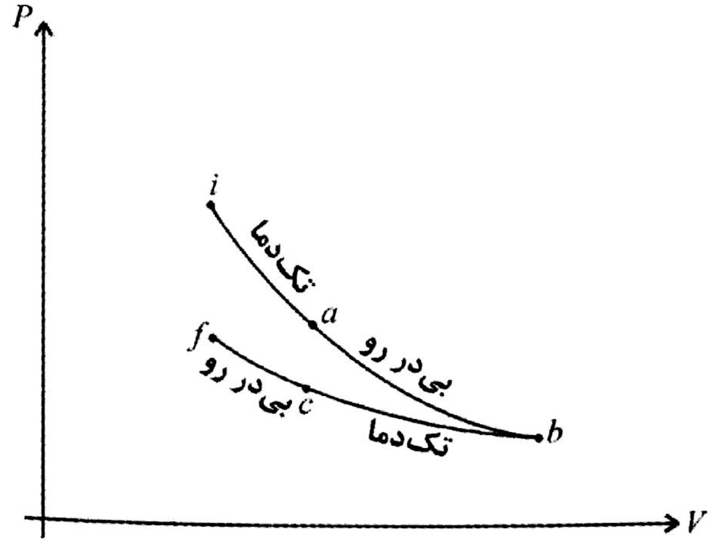
Scanned by CamScanner

●●۵۹- شکل ۱۵–۲۶ دو مسیر را نشان می‌دهد که می‌تواند توسط یک گاز از نقطهٔ اولیهٔ i تا نقطهٔ نهایی f طی شود. مسیر ۱ شامل یک انبساط تک‌دما (اندازهٔ کار ۵۰J)، یک انبساط بی‌دررو (اندازهٔ کار ۴۰J) ، یک تراکم تک‌دما (اندازهٔ کار ۳۰J) و سپس یک تراکم بی‌دررو (اندازهٔ کار ۲۵ J) است. اگر گاز از نقطهٔ i به نقطهٔ f در راستای مسیر ۲ برود تغییر در انرژی درونی چقدر است؟



شکل ۱۵–۲۶ مسئلهٔ ۵۹

حل: برای مسیر اول داریم



فرآیند ia تک‌دماست، لذا

$$\Delta E_{ia} = Q - W = ۰$$

$$\Rightarrow Q = W = ۵۰\,\text{J}$$

Scanned by CamScanner

فرآیند ab بی‌دروست، از این رو

$$\Delta E_{ab} = Q - W = ۰ - ۴۰ = -۴۰\,\text{J}$$

فرآیند bc تک‌دماست، پس

$$\Delta E_{bc} = ۰$$

$$\Rightarrow Q = W = -۳۰\,\text{J}$$

و برای فرآیندی بی‌درروی ef داریم،

$$\Delta E_{cf} = W - Q = ۰ - (-۲۵) = ۲۵\,\text{J}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{if} = \Delta E_{ia} + \Delta E_{ab} + \Delta E_{bc} + \Delta E_{cd} = ۰ - ۴۰ + ۰ + ۲۵$$

$$= -۱۵\,\text{J}$$

از آنجا که تغییر انرژی درونی مستقل از مسیر است پس ΔE_{if} برای مسیر ۲ نیز (-۱۵J) است.

Scanned by CamScanner

●●۶۰۰۰- [redacted] باد بی دررو. جریان طبیعی هوا در کوه‌های راکی[1] از غرب به شرق است. هوا رطوبت خود را از دست می‌دهد و وقتی ضلع غربی کوه‌ها را می‌پیماید سرد می‌شود. وقتی به ضلع شرقی فرود می‌آید، افزایش در فشار به طرف ارتفاع‌های پایین‌تر موجب افزایش دما می‌شود. جریان که باد چینوک[2] نامیده می‌شود می‌تواند دمای هوا را در کوهپایه به طور سریع افزایش دهد. فرض کنید که فشار p هوا به ارتفاع y با رابطهٔ $p = p_۰ \exp(-ay)$ داده می‌شود که $p_۰ = ۱/۰۰\,\text{atm}$ و $a = ۱/۱۶ \times ۱۰^{-۴}\ \text{m}^{-۱}$ است. هم‌چنین فرض کنید که نسبت گرماهای ویژهٔ مولی $\gamma = \frac{۴}{۳}$ است. یک قسمت از هوا با دمای اولیهٔ $-۵/۰۰^\circ\text{C}$ به طور بی دررو از $y_۱ = ۴۲۶۷\,\text{m}$ به $y = ۱۵۶۷\,\text{m}$ می‌رسد. دما در انتهای این پایین آمدن چقدر است؟

حل: $p_۱ = p_۰ e^{-ay_۱} = ۱/۰ \times ۱۰^۵\, e^{-(۱/۱۶\times۱۰^{-۴})(۴۲۶۷)} = ۶/۱ \times ۱۰^۴\ \text{Pa}$

$p_۲ = p_۰ e^{-ay_۲} = ۱/۰ \times ۱۰^۵\, e^{-(۱/۱۶\times۱۰^{-۴})(۱۵۶۷)} = ۸/۳ \times ۱۰^۴\ \text{Pa}$

$pV^\gamma = \text{ثابت} \quad , \quad \gamma = \frac{۴}{۳} \quad , \quad pV = nRT \qquad V = \frac{nRT}{p}$

$p\left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = \text{ثابت} \qquad\qquad \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-۱}} = \text{ثابت}$

$\frac{T_۲^\gamma}{p_۲^{\gamma-۱}} = \frac{T_۱^\gamma}{p_۱^{\gamma-۱}} \qquad\qquad T_۲ = T_۱\left(\frac{p_۲}{p_۲}\right)^{\frac{\gamma-۱}{\gamma}}$

$T_۲ = ۲۶۸\left(\frac{۸/۳\times۱۰^۴}{۶/۱\times۱۰^۴}\right)^{\frac{۱}{۴}} = ۲۹۰\,\text{K}$ یا ۱۷°C

Scanned by CamScanner

●●●۶۲- یک گاز آرمانی دو اتمی با چرخش ولی بدون نوسان به طور بی‌دررو منبسط می‌شود. فشار اولیه و حجم اولیهٔ آن ۱/۲۰atm و $۰/۲۰۰m^۳$ و فشار نهایی آن ۲/۴۰atm است. چقدر کار توسط گاز انجام می‌شود؟

حل: فرآیند بی‌درو است، لذا $\Delta E_{int} = Q - W = -W$

$C_V = \frac{۵}{۲}R$ (برای گاز دو اتمی داریم)

$$\begin{cases} p_۱ V_۱ = nRT_۱ \\ p_۲ V_۲ = nRT_۲ \end{cases} \Rightarrow nR(T_۲ - T_۱) = p_۲V_۲ - p_۱V_۱$$

$$W = nR\Delta T = p_۲V_۲ - p_۱V_۱ \Rightarrow \Delta T = \frac{p_۲V_۲ - p_۱V_۱}{nR}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{int} = nC_V\Delta T = \frac{۵}{۲}nR \cdot \frac{p_۲V_۲ - p_۱V_۱}{nR}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{int} = ۲/۵(p_۲V_۲ - p_۱V_۱)$$

از طرفی روابط زیر را برای محاسبهٔ $V_۲$ ، داریم؛

$$p_۱ V_۱^{\gamma} = p_۲ V_۲^{\gamma}$$

$$\frac{p_۲}{p_۱} = \left(\frac{V_۱}{V_۲}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{۲/۴}{۱/۲} = \left(\frac{۰/۲}{V_۲}\right)^{۱/۴} \Rightarrow \ln ۲ = \frac{۱}{۴}\ln\frac{۰/۲}{V_۲}$$

$$\text{op}\frac{۰/۲}{V_۲} = e^{۰/۴۹۵} \Rightarrow V_۲ = ۰/۱۲۲\,\text{m}^۳$$

$$\Rightarrow \Delta E_{int} = ۲/۵[(۲/۴\times ۱۰^۵)(۰/۱۲۲) - (۱/۲\times ۱۰^۵)(۰/۲)]$$

$$= ۱۳۲۰۰\,\text{J}$$

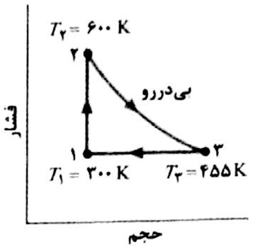
و $W = -\Delta E_{int} = -۱۳۲۰۰\,\text{J}$

Scanned by CamScanner

●●●۶۳- شکل ۱۵-۲۷ چرخه‌ای را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ $1/00\,mol$ از یک گاز تک اتمی آرمانی پیموده می‌شود. برای فرآیند ۱→۲، (الف) گرمای Q، (ب) تغییر در انرژی درونی،

Scanned by CamScanner

ΔE_{int} و (پ) کار انجام شدهٔ W ، چقدر است؟ در فرآیند ۳ → ۲
(ت) Q ، (ث) ΔE_{int} و (ج) W ، چقدر است؟ در فرآیند ۱ → ۳،
(چ) Q ، (ح) ΔE_{int} و (خ) W ، چقدر است؟ در کـل چرخـه (د)
Q ، (ذ) ΔE_{int} و (ر) W ، چقدر است؟ فشار اولیه در نقطهٔ ۱ برابر
با $1/00\,atm$ $(=1/013\times10^{5}\,Pa)$ است. (ز) حجم و (ژ) فشـار در
نقطهٔ ۲ و (س) حجم و (ش) فشار در نقطهٔ ۳ چقدر است؟



شکل ۱۵-۲۷ مسئلهٔ ۶۳

حل: (الف) در مسیر ۱ به ۲ فرآیند تک حجم است، لذا

$$Q_{12} = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}(1)(8/31)(600-300)$$
$$= 3/74\times10^{3}\ J$$

(ب) $\Delta E_{int,12} = Q_{12} - W_{12} = Q_{12} - 0 = 3/74\times10^{3}\ J$

(پ) کار در فرآیند تک حجم صفر است. $W_{12} = 0$

(ت) در مسیر ۲ به ۳ فرآیند بی‌درو است. بنابراین،

(ث) $Q_{23} = 0$

$$\Delta E_{int} = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_3 - T_2)$$
$$= \frac{3}{2}(1)(8/31)(455-600) = -1/81\times10^{3}\ J$$

(ج) $\Delta E_{int}t_{23} = Q_{23} - W_{23}$

$$\Rightarrow W_{23} = -\Delta E_{int_{23}} = +1/81\times10^{3}\ J$$

(چ) فرآیند ۳ به ۱ تک فشار است.

$$Q_{31} = nC_P\Delta T = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{5}{2}(1)(8/31)(300-455)$$
$$= -3/22\times10^{3}\ J$$

(ح) $\Delta E_{int_{31}} = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_3)$

$$= \frac{3}{2}(1)(8/31)(300-455) = -1/93\times10^{3}\ J$$

(خ) $\Delta E_{int_{31}} = Q_{31} - W_{31} \Rightarrow W_{31} = Q_{31} - \Delta E_{int_{31}}$

$$W_{31} = (-3/22+1/93)\times10^{3} = -1/29\times10^{3}\ J$$

(د) $Q_{tot} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$

$$= 3/74\times10^{3}\ J + 0 - 3/22\times10^{3}\ J = 520\ J$$

(ذ) تغییر انرژی درونی در هر چرخه صفر است.

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_{12} + \Delta E_{23} + \Delta E_{31} = 0$$

(ر) $W_{tot} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 0 + 1/81\times10^{3} - 1/29\times10^{3}$

$$= 520\ J$$

Scanned by CamScanner

$$p_۱V_۱ = nRT_۱ \Rightarrow V_۱ = \frac{nRT_۱}{p_۱} = \frac{۱(۸/۳۱)(۳۰۰)}{(۱/۰۱۳\times۱۰^۵)} = ۲/۴۶\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{m}^۳$$ (ز

$$p_۳V_۳ = nRT_۳ \Rightarrow V_۳ = \frac{nRT_۳}{p_۳} = \frac{۱(۸/۳۱)(۴۵۵)}{(۱/۰۱۳\times۱۰^۵)} = ۰/۰۳۸\mathrm{m}^۳$$

$$\frac{p_۱V}{T_۱} = \frac{p_۲V}{T_۲} \Rightarrow p_۲ = \frac{p_۱T_۲}{T_۱} = \frac{۱\times۶۰۰}{۳۰۰} = ۲\mathrm{atm}$$ (ژ

$$V_۲ = V_۱ = ۰/۰۲۴۶\mathrm{m}^۳$$ (س

$$p_۳ = p_۱ = ۱/۰۱۳\times۱۰^۵\ \mathrm{Pa}$$ (ش

Scanned by CamScanner

۸۶- در یک فرآیند صنعتی حجم ۲۵/۰mol از یک گاز تک اتمی آرمانی با آهنگ یکنواخت از ۰/۶۱۶m³ به ۰/۳۰۸m³ در مدت ۲/۰۰h کاهش می‌یابد درحالی که دمای آن با آهنگ یکنواخت از ۲۷/۰°C به ۴۵۰°C افزایش می‌یابد. در طی این فرآیند، گاز از حالت‌های تعادل ترمودینامیکی می‌گذرد. (الف) کار به روش افزایش انجام شده روی گاز (ب) انرژی رو به افزایش جذب شده به صورت گرما توسط گاز و (پ) گرمای ویژهٔ مولی این فرآیند، چقدر است؟ (*راهنمایی*: برای محاسبهٔ انتگرالی کار می‌توانید از انتگرال نامعین زیر استفاده کنید.)

$$\int\frac{a+bx}{A+Bx}dx=\frac{bx}{B}+\frac{aB-bA}{B^{۲}}\ln(A+Bx)$$

فرض کنید این فرآیند با یک فرآیند دو مرحله‌ای که به همان حالت نهایی برسد جایگزین شود. در مرحلهٔ ۱ حجم گاز در دمای ثابت کاهش یابد و در مرحلهٔ ۲ در حجم ثابت دمای گاز افزایش یابد. برای این فرآیند (ت) کار روبه افزایش انجام شده روی گاز، (ث) انرژی رو به افزایش جذب شده به صورت گرما توسط گاز و (ج) گرمای ویژهٔ مولی برای این فرآیند چقدر است؟

حل: (الف)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=cte$$

$$\frac{۰/۳۰۸-۰/۶۱۶}{۲}=\frac{v-۰/۶۱۶}{t}\Rightarrow v=-۰/۱۵۴t+۰/۶۱۶$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = cte$$

$$\frac{\Delta T}{۲} = \frac{T - ۳۰۰}{t} \Rightarrow \frac{۴۲۳}{۲} = \frac{T - ۳۰۰}{t} \Rightarrow T = ۲۱۱/۵t + ۳۰۰$$

$$pV = nRT$$

$$p(-۰/۱۵۴t + ۰/۶۱۶) = (۲۵)(۸/۳۱)(۲۱۱/۵t + ۳۰۰)$$

$$p = \frac{(۲۰۷/۸۵)(۲۱۱/۵t + ۳۰۰)}{(-۰/۱۵۴t + ۰/۶۱۶)}$$

$$W = \int_{V_۱}^{V_۲} pdV = \int_{t=۰}^{۲} \frac{(۲۰۷/۸۵)(۲۱۱/۵t + ۳۰۰)}{(-۰/۱۵۴t + ۰/۶۱۶)}(-۰/۱۵۴)dt$$

$$= ۳۲\int_{t=۰}^{۲} \frac{(۲۱۱/۵t + ۳۰۰)}{(-۰/۱۵۴t + ۰/۶۱۶)} dt$$

از راهنمایی مسئله برای محاسبهٔ انتگرال استفاده می‌شود.

$$W = ۳۲\left\{\frac{۲۱۱/۵t}{-۰/۱۵۴} + \frac{(۳۰۰)(-۰/۱۵۴) - (۲۱۱/۵)(۰/۶۱۶)}{(-۰/۱۵۴)^۲}\right.$$

$$\left.\times \ln(۰/۶۱۶ - ۰/۱۵۴t)\right\}\Bigg|_۰^۲ = -۷/۷۱۶ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

ب) $\Delta E_{int} = nC_V \Delta T = \frac{۳}{۲} nR\Delta T \Rightarrow dE_{int} = \frac{۳}{۲} nR(۲۱۱/۵)dt$

$$\Delta E_{int} = \frac{۳}{۲}(۲۵)(۸/۳۱)(۲۱۱/۵)t\Big|_۰^۲ = ۱/۳۲ \times ۱۰^۵ \text{ J}$$

$$\Delta E_{int} = Q - W \Rightarrow Q = \Delta E_{int} + W$$

$$Q = ۱/۳۲ \times ۱۰^۵ - (-۷/۷۱۶ \times ۱۰^۴) = ۵/۴۷ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

پ) $Q = nC\Delta T \Rightarrow C = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{۵/۴۷ \times ۱۰^۴}{۲۵(۴۲۳)}$

$$C = ۵/۱۷۶ \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

ت) ازآنجا که فرآیند بین همان ۲ نقطه انجام می‌شود، تغییر انرژی درونی ثابت است، پس $\Delta E = ۱/۳۲ \times ۱۰^۵$ J .

در فرآیند تک‌دما؛ $W = nRT \ln\frac{V_۲}{V_۱} = ۲۵(۸/۳۱)(۳۰۰)\ln\left(\frac{۰/۳۰۸}{۰/۶۱۶}\right)$

$$W = ۴/۳ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

در فرآیند تک حجم ؛ $W = ۰$

$$\Rightarrow W_{tot} = -۴/۳ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

ث) $\Delta E_{int} = Q - W \Rightarrow Q = \Delta E_{int} + W$

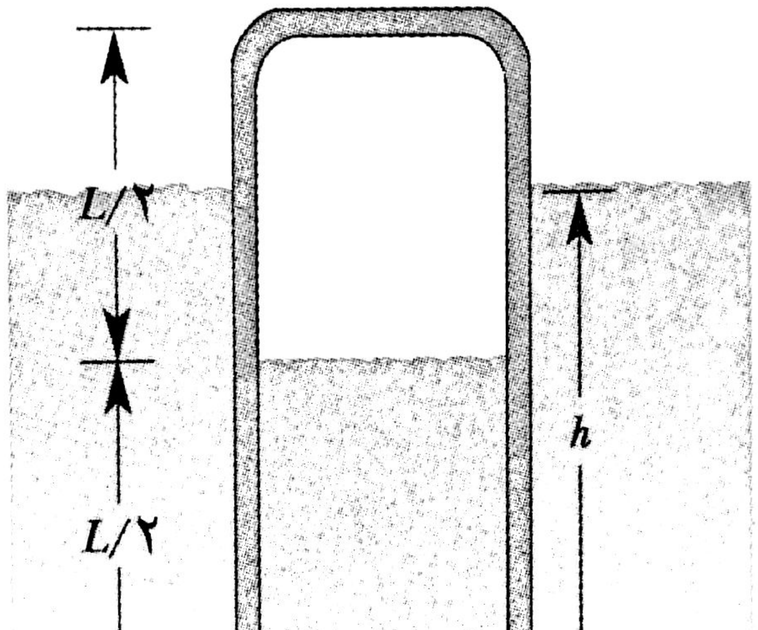
$$Q = ۱/۳۲ \times ۱۰^۵ - ۴/۳ \times ۱۰^۴ = ۸/۸۷ \times ۱۰^۴ \text{ J}$$

ج) $Q = nC\Delta T \Rightarrow C = \frac{Q}{n\Delta T}$

$$C = \frac{۸/۸۷ \times ۱۰^۴}{(۲۵)(۴۲۳)} = ۸/۳۸ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Scanned by CamScanner

۸۹- در داخل لوله‌ای به طول $L = ۲۵/۰\text{m}$ که یک طرف آن باز است هوا در فشار جوی قرار دارد. آن را در داخل آب دریاچه واژگون می‌کنند تا آب تا اینکه آب تا نیمه آن بالا بیاید (شکل ۱۵–۳۰). عمق h طرف پایین لوله چقدر است؟ فرض کنید که دما در همه‌جا یکسان است و تغییر نمی‌کند.



شکل ۱۵–۳۰ مسئلهٔ ۸۹

Scanned by CamScanner

حل: تعادل فشار درون و بیرون لوله الزام می‌دارد که

$$p + f_w g\left(\frac{L}{۲}\right) = p_\circ + f_w gh$$

که در آن $p_\circ$ فشار جو، p فشار هوای درون لوله است که در شرط $p(\frac{L}{۲}) = p_\circ L$ یا $p = ۲p_\circ$ صادق است. به‌این ترتیب داریم:

$$h = \frac{p - p_\circ}{\rho_w g} + \frac{L}{۲} = \frac{۱/۰۱\times۱۰^{۵}\ \text{Pa}}{(۱/۰۰\times۱۰^{۳}\ \text{kg/m}^{۳})(۹/۸\text{m/s}^{۲})} + \frac{۲۵/۰\text{m}}{۲}$$

$$= ۲۲/۸\text{m}$$

Scanned by CamScanner

۹۱- در فرایندهای بی دررو در گاز آرمانی نشان دهید که (الف) مدول کپه‌ای با رابطه زیر داده می‌شود

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p$$

که $\gamma = C_p / C_V$ (به معادلهٔ ۱۳-۲ نگاه کنید). سپس نشان دهید که تندی صورت در این گاز عبارت‌است از

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

که ρ چگالی، T دما و M جرم مولی است (به معادلهٔ ۱۳-۳) نگاه کنید.

حل: (الف) برای فرایند بی‌دررو داریم $pV^{\gamma} = C$، که در آن C مقدار ثابت است. به‌این ترتیب داریم $p = CV^{-\gamma}$. با توجه به رابطهٔ داده شده برای مدول کپه‌ای داریم

$$B = -V \frac{dp}{dV} = -V \frac{d}{dV}(CV^{-\gamma}) = \gamma CV^{-\gamma} = \gamma p$$

(ب) با استفاده از رابطهٔ $p = nRT/V = (m/M)RT/V$ و $S = \mathrm{m/V}$ داریم

$$v_s = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma (m/M)RT/V}{m/V}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Scanned by CamScanner